



TITLE:

有限待合室をもつGI/E $\frac{k}{1}$ の解析及び数値結果(待ち行列理論とその応用)

AUTHOR(S):

能上, 慎也; 菰田, 保夫; 星子, 幸男

CITATION:

能上, 慎也 ...[et al]. 有限待合室をもつGI/E $\frac{k}{1}$ の解析及び数値結果(待ち行列理論とその応用). 数理解析研究所講究録 1983, 490: 179-194

ISSUE DATE:

1983-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103514>

RIGHT:

有限待合室をもつ $GI/E_k/1$ の解析及び数値結果

東北大学大学院 能上慎也 (Shinya Nogami)

東北大学工学部 菰田保夫 (Yasuo Komota)

星子幸男 (Yukio Hoshiko)

1. はじめに

待ち行列理論における解法の一つに補助変数法があり、これを用いて様々なシステムを統一的に取り扱えないかという見地から筆者らは研究を進めているが、本稿では有限待合室をもつ $GI/E_k/1$ を取り扱う。

このシステムは、既に Ohnone⁽⁶⁾ が、補助変数法(経過到着時間)とフェーズ法を組み合わせる解析を行ない、数値結果から平均系内容数の興味深い特性について論じているが、本稿では、補助変数として客の残余到着時間を選び、さらに系内の残余フェーズ数を組み合わせる用いることによってこのシステムに対して同様の系内容数分布が得られること、及び諸特性量(実待ち時間、応答時間、退去間隔、遊休期間長等の分布)も比較的簡単に求められることを示す。また、いくつかの例で数値例を示し、その特性について論じる。

2. システムの記述

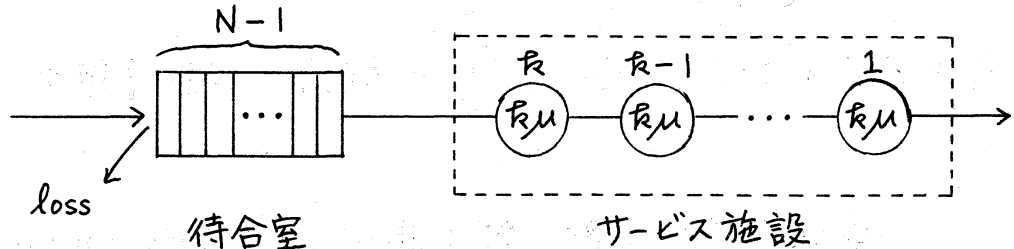


Fig. 1 GI/Er/1/N システム

上図のようなGI/Er/1/N システムを考えるが、以下、次のような記法を用いることにする。

N : サービス中の客を含む系内容量

$a(x)$: 客の到着間隔を表わす確率変数 X_0 が従う p. d. f.

$$b(x) = \frac{r\mu(r\mu x)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-r\mu x}$$

: サービス時間を表わす確率変数 X_1 が従う p. d. f.

$$A(\theta) \triangleq \int_0^{\infty} a(x) e^{-\theta x} dx$$

客の到着間隔の系列 $\{X_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$ は、平均到着間隔 $E[X_{0n}] = \lambda^{-1}$ である一般の $a(x)$ に従う i. i. d. (independent, identically distributed) な系列であり、客の平均サービス時間の系列 $\{X_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$ は、平均サービス時間 $E[X_{1n}] = \mu^{-1}$ である r 次のポアソン分布 $b(x)$ に従う i. i. d. な系列である。また、 $\{X_{0n}\}$ と $\{X_{1n}\}$ とは互いに独立であるものとする。更に、待合室が満員、即ち系内容数が N であるときに到着が起こると、到着客は系内にはいることを許されず loss になり、次の客の到着までの時間は再

び $Q(x)$ に従うことになる。尚、サービス規律は先着順(FCFS)であるものとし、客はFig.1のように番号をつけられた n 個のフェーズ内でそれぞれパラメータ τ_μ の指数サービスを受け、系外に退去する。

このような有限待合室をもつシステムでは、常に定常状態が存在するが、以下この定常状態における系の振舞いのみに限定して考えることにする。

今、定常状態の任意時点での系の状態を (X, T) で表わすことにする。但し、 X : 系内の全残余フェーズ数; T : 次の客の到着までの残余時間; 各々の客は、サービスを受けてから退去するまでに n 個のフェーズを通過するが、 X は現時点で系内にいるすべての客が退去するまでに通過するフェーズ数の総和を表わすことになり、次式のように表わされる。

$$X = \begin{cases} (Q-1)n + J & (1 \leq Q \leq N) \\ 0 & (Q=0) \end{cases} \quad (0 \leq X \leq Nn)$$

但し、 Q : 系内客数 ($0 \leq Q \leq N$); J : 現在サービス中の客がいるフェーズの番号 ($1 \leq J \leq n$);

システムの状態遷移図はFig.2のように表わされる。フェーズ数はレート τ_μ でランダムに1減少し残余到着時間は変化しない。 $0 \leq Q \leq N-1$ のとき、 $T=0$ になると X は n 増加し、 $Q(x)$ に従う残余到着時間が新しく選ばれる。 $Q=N$ のとき

きには到着が起こってもその客は loss され、フェーズ数は変化せず、新しく残余到着時間が選ばれることになる。

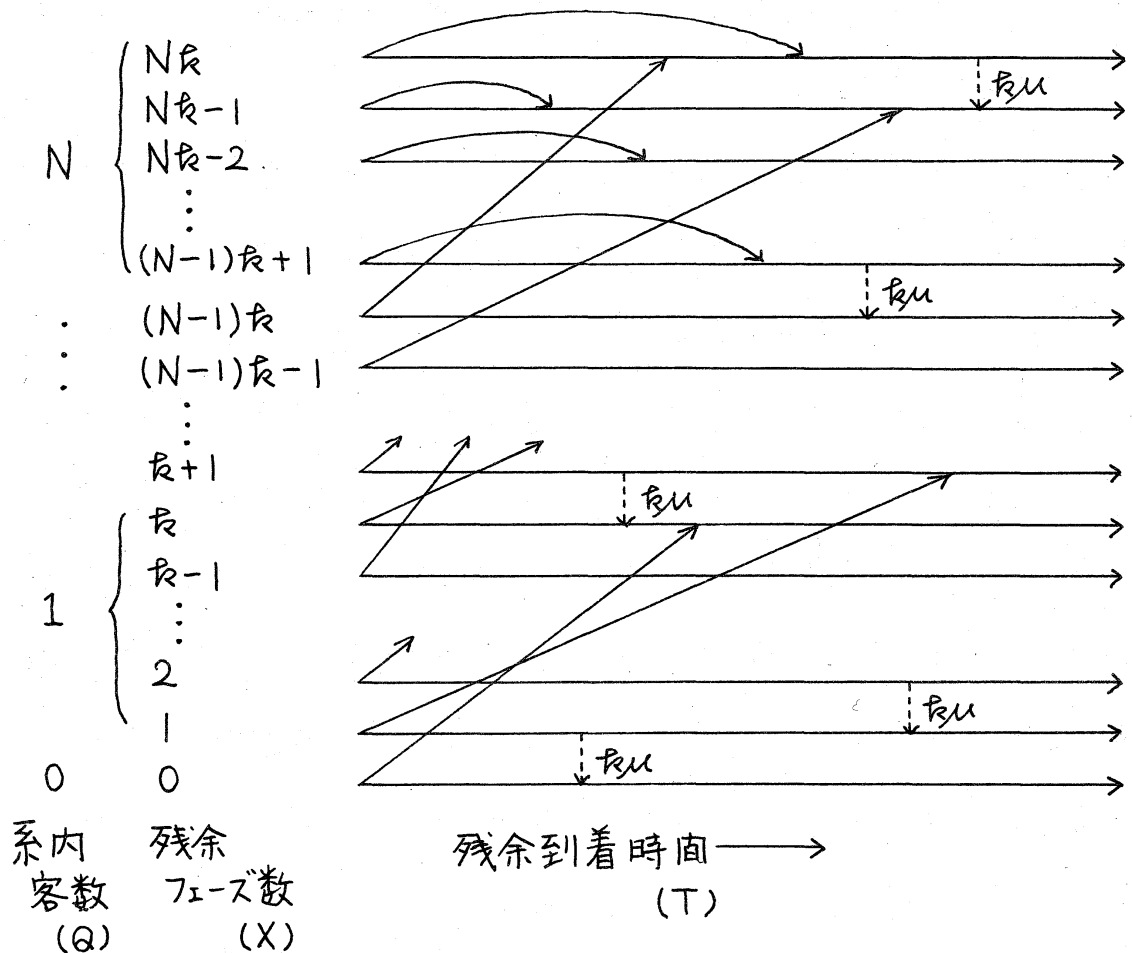


Fig. 2 状態遷移図

3. 基本方程式と解法

定常状態において次のような結合確率密度関数 $P_i(x)$ 、及びそのラプラス変換を定義する。

$$P_i(x)dx \triangleq \Pr[X=i, x \leq T < x+dx] \quad (x \geq 0, 0 \leq i \leq N_r)$$

$$P_i(0) \triangleq \int_0^\infty P_i(x) e^{-\theta x} dx \quad (0 \leq i \leq N_r)$$

Fig. 2 を考慮し、微小時間内での状態推移について考えると

上の変換を用いて次のような基本方程式が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta P_0(\theta) = P_0(0) - k\mu P_1(\theta) & (1) \\ (\theta - k\mu) P_i(\theta) = P_i(0) - k\mu P_{i+1}(\theta) & (1 \leq i \leq k-1) \quad (2) \\ (\theta - k\mu) P_i(\theta) = P_i(0) - k\mu P_{i+1}(\theta) - A(\theta) P_{i-k}(0) & (k \leq i \leq (N-1)k) \quad (3) \\ (\theta - k\mu) P_i(\theta) = P_i(0) - k\mu P_{i+1}(\theta) - A(\theta) P_{i-k}(0) - A(\theta) P_i(0) & ((N-1)k+1 \leq i \leq Nk-1) \quad (4) \\ (\theta - k\mu) P_{Nk}(\theta) = P_{Nk}(0) - A(\theta) P_{(N-1)k}(0) - A(\theta) P_{Nk}(0) & (5) \\ \text{正規化条件 } \sum_{i=0}^{Nk} P_i(0) = 1 & (6) \end{array} \right.$$

(1)~(5)式より、 i の大きな値から逐次代入していくと、結局 $P_i(\theta)$ ($0 \leq i \leq Nk$) を $P_i(0)$ ($0 \leq i \leq Nk$) を用いて表わすことができる。ここで(1)~(5)式から $P_i(0)$ ($0 \leq i \leq Nk$) が求まれば $P_i(\theta)$ ($0 \leq i \leq Nk$) の値が決定することになる。以下、 $P_i(0)$ を求める為に必要な連立方程式を導出する。

まず、(1)~(5)式から $P_i(\theta)$ を消去する為の準備として、次の式をそれぞれ求めておく。

(1)~(5)式の辺々を加えると次式を得る。

$$\sum_{i=0}^{Nk} P_i(\theta) = \frac{1-A(\theta)}{\theta} \sum_{i=0}^{Nk} P_i(0) \quad (7)$$

ここで $\theta = 0$ とおき、(6)式を用いると、

$$\sum_{i=0}^{Nk} P_i(0) = -A''(0) \sum_{i=0}^{Nk} P_i(0)$$

但し、 $A^{(m)}(k) \triangleq d^m A(\theta) / d\theta^m |_{\theta=k}$ ($m \geq 0$)

よって結局次式を得る。

$$\sum_{i=0}^{Nr} P_i(0) = \lambda \quad (8)$$

(2) ~ (5) 式で $\theta = k\mu$ とおくと次式を得る。

$$P_i(0) = k\mu P_{i+1}(k\mu) \quad (1 \leq i \leq k-1) \quad (9)$$

$$P_i(0) = k\mu P_{i+1}(k\mu) + A(k\mu) P_{i-k}(0) \quad (k \leq i \leq (N-1)k) \quad (10)$$

$$P_i(0) = k\mu P_{i+1}(k\mu) + A(k\mu) P_{i-k}(0) + A(k\mu) P_i(0) \quad ((N-1)k+1 \leq i \leq Nr-1) \quad (11)$$

$$P_{Nr}(0) = A(k\mu) P_{(N-1)k}(0) + A(k\mu) P_{Nr}(0) \quad (12)$$

(2) ~ (5) 式で $(n+1)$ 回微分して $\theta = k\mu$ とおくと次式を得る。

$$P_i^{(n)}(k\mu) = -k\mu P_{i+1}^{(n+1)}(k\mu) / (n+1) \quad (1 \leq i \leq k-1) \quad (13)$$

$$P_i^{(n)}(k\mu) = -\{k\mu P_{i+1}^{(n+1)}(k\mu) + A^{(n+1)}(k\mu) P_{i-k}(0)\} / (n+1) \quad (k \leq i \leq (N-1)k) \quad (14)$$

$$P_i^{(n)}(k\mu) = -\{k\mu P_{i+1}^{(n+1)}(k\mu) + A^{(n+1)}(k\mu) P_{i-k}(0) + A^{(n+1)}(k\mu) P_i(0)\} / (n+1) \quad ((N-1)k+1 \leq i \leq Nr-1) \quad (15)$$

$$P_{Nr}^{(n)}(k\mu) = -\{A^{(n+1)}(k\mu) P_{(N-1)k}(0) + A^{(n+1)}(k\mu) P_{Nr}(0)\} / (n+1) \quad (16)$$

ここで、(13) ~ (16) 式を (9) ~ (12) 式に代入して $P_i(0)$ を、 $1 \leq i \leq k-1$ の範囲では $P_k^{(k-1-i)}(k\mu)$ を用いて、 $k \leq i \leq (N-1)k$ の範囲では $P_{(N-1)k+1}^{((N-1)k-i)}(k\mu)$ を用いて、 $(N-1)k+1 \leq i \leq Nr-1$ の範囲では $P_{Nr}^{(Nr-1-i)}(k\mu)$ を用いてそれぞれ表わす。ここで、

$$\alpha_m \triangleq \frac{(-k\mu)^m A^{(m)}(k\mu)}{m!} \quad \beta_m \triangleq \frac{k\mu (-k\mu)^m}{m!} \quad (m \geq 0)$$

とおくと、次式のように表わせる。

$$P_i(0) = \beta_{r-1-i} P_r^{(r-1-i)}(\lambda\mu) \quad (1 \leq i \leq r-1) \quad (17)$$

$$P_i(0) = \beta_{(N-1)r-i} P_{(N-1)r+1}^{((N-1)r-i)}(\lambda\mu) + \sum_{\ell=i-r}^{(N-2)r} \alpha_{\ell+r-i} P_\ell(0) \quad (r \leq i \leq (N-1)r) \quad (18)$$

$$P_i(0) = \left\{ \beta_{Nr-1-i} P_{Nr}^{(Nr-1-i)}(\lambda\mu) + \sum_{\ell=i+1}^{Nr-1} \alpha_{\ell-i} P_\ell(0) + \sum_{\ell=i-r}^{(N-1)r-1} \alpha_{\ell+r-i} P_\ell(0) \right\} / (1 - A(\lambda\mu)) \quad ((N-1)r+1 \leq i \leq Nr-1) \quad (19)$$

上式にそれぞれ(13)~(15)式を代入して、逐次代入していくと、

β_m は α_m に書き換えられる形になり、次式を得る。

$$\begin{cases} P_i(0) = \sum_{\ell=0}^{(N-1)r} \alpha_{\ell+r-i} P_\ell(0) + \sum_{\ell=(N-1)r+1}^{Nr} \alpha_{\ell-i} P_\ell(0) & (1 \leq i \leq r-1) \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} P_i(0) = \sum_{\ell=i-r}^{(N-1)r} \alpha_{\ell+r-i} P_\ell(0) + \sum_{\ell=(N-1)r+1}^{Nr} \alpha_{\ell-i} P_\ell(0) & (r \leq i \leq (N-1)r) \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} P_i(0) = \sum_{\ell=i-r}^{(N-1)r} \alpha_{\ell+r-i} P_\ell(0) + \sum_{\ell=i}^{Nr} \alpha_{\ell-i} P_\ell(0) & ((N-1)r+1 \leq i \leq Nr-1) \end{cases} \quad (22)$$

$$P_{Nr}(0) = \alpha_0 P_{(N-1)r}(0) + \alpha_0 P_{Nr}(0) \quad (23)$$

$P_i(0)$ ($0 \leq i \leq Nr$) は未知数として $(Nr+1)$ 個存在するが、上の(20)~(23)式と正規化条件式である(8)式を加えると $(Nr+1)$ 個の連立方程式が得られているので、到着間隔の p.d.f. $\alpha(x)$ さえ与えられると α_m が定まり、上式を数値計算で解くことにより、 $P_i(0)$ の値が決定される。

4. 諸特性量

(20)~(23)、及び(8)式の連立方程式から $P_i(0)$ の値が決定されるので、以下種々の特性量をこの $P_i(0)$ を用いて表わす。

(A) $P_i(x)$

(1)~(4)式から求めた $P_i(0)$ をラプラス逆変換して次式を得る。

$$\begin{aligned}
& P_i(x) \\
& = \begin{cases} \frac{1}{k\mu} \int_0^x \left\{ e^{\frac{k\mu t}{\lambda}} \sum_{j=1}^{Nr} \beta_{j-1} t^{j-1} P_j(0) - \sum_{j=k}^{Nr} \beta_{j-1} P_{j-k}(0) \int_0^t y^{j-1} e^{\frac{k\mu y}{\lambda}} a(t-y) dy \right. \\ \quad \left. - \sum_{j=(N-1)k+1}^{Nr} \beta_{j-1} P_j(0) \int_0^t y^{j-1} e^{\frac{k\mu y}{\lambda}} a(t-y) dy \right\} dt + P_0(0) u(x) & (i=0) \\ \frac{1}{k\mu} \left\{ e^{\frac{k\mu x}{\lambda}} \sum_{j=i}^{Nr} \beta_{j-i} x^{j-i} P_j(0) - \sum_{j=k}^{Nr} \beta_{j-i} P_{j-k}(0) \int_0^x y^{j-i} e^{\frac{k\mu y}{\lambda}} a(x-y) dy \right. \\ \quad \left. - \sum_{j=(N-1)k+1}^{Nr} \beta_{j-i} P_j(0) \int_0^x y^{j-i} e^{\frac{k\mu y}{\lambda}} a(x-y) dy \right\} & (1 \leq i \leq k-1) \\ \frac{1}{k\mu} \left\{ \sum_{j=i}^{Nr} \beta_{j-i} [x^{j-i} e^{\frac{k\mu x}{\lambda}} P_j(0) - P_{j-k}(0) \int_0^x y^{j-i} e^{\frac{k\mu y}{\lambda}} a(x-y) dy] \right. \\ \quad \left. - \sum_{j=(N-1)k+1}^{Nr} \beta_{j-i} P_j(0) \int_0^x y^{j-i} e^{\frac{k\mu y}{\lambda}} a(x-y) dy \right\} & (k \leq i \leq (N-1)k) \\ \frac{1}{k\mu} \sum_{j=i}^{Nr} \beta_{j-i} \left\{ [x^{j-i} e^{\frac{k\mu x}{\lambda}} - \int_0^x y^{j-i} e^{\frac{k\mu y}{\lambda}} a(x-y) dy] P_j(0) \right. \\ \quad \left. - P_{j-k}(0) \int_0^x y^{j-i} e^{\frac{k\mu y}{\lambda}} a(x-y) dy \right\} & ((N-1)k+1 \leq i \leq Nr) \end{cases} \quad (24)
\end{aligned}$$

但し、 $u(x)$: 単位ステップ関数

(B) 到着直前での全残余フェーズ数分布 P_i^0

$$P_i^0 = P_i(0) / \sum_{j=0}^{Nr} P_j(0) = P_i(0) / \lambda \quad (0 \leq i \leq Nr) \quad (25)$$

(C) 任意時点での全残余フェーズ数分布 P_i^*

$$P_i^* = \int_0^\infty P_i(x) dx = P_i(0)$$

(1) 式で $\theta = 0$ とおくと、

$$P_i(0) = P_0(0) / k\mu$$

以下 i の小さい値から逐次代入していくと次式を得る。

$$\begin{aligned}
P_i^* & = \begin{cases} \sum_{j=0}^{i-1} P_j(0) / k\mu & (1 \leq i \leq k-1) \\ \sum_{j=i-k}^{i-1} P_j(0) / k\mu & (k \leq i \leq (N-1)k) \\ \sum_{j=i-k}^{(N-1)k} P_j(0) / k\mu & ((N-1)k+1 \leq i \leq Nr) \end{cases} \\
P_0^* & = 1 - \sum_{i=1}^{Nr} P_i^* \quad (26)
\end{aligned}$$

(D) 到着直前での系内容数分布 g_n^0

$$g_n^0 = \sum_{i=1}^{Nn} P_{(n-1)R+i}^0 = \sum_{i=1}^{Nn} P_{(n-1)R+i}(0)/\lambda \quad (1 \leq n \leq N)$$

$$g_0^0 = P_0^0 = P_0(0)/\lambda = 1 - \sum_{j=1}^{NR} P_j(0)/\lambda \quad (27)$$

(E) 任意時点での系内容数分布 g_n^*

$$g_n^* = \sum_{i=1}^{Nn} P_{(n-1)R+i}^* = \begin{cases} \sum_{i=1}^{NR} \sum_{j=0}^{i-1} P_j(0)/R\mu & (n=1) \\ \sum_{i=1}^{NR} \sum_{j=(n-2)R+i-1}^{(n-1)R+i-1} P_j(0)/R\mu & (2 \leq n \leq N-1) \\ \sum_{i=1}^{NR} \sum_{j=(N-2)R+i}^{(N-1)R} P_j(0)/R\mu & (n=N) \end{cases}$$

$$g_0^* = P_0^* = 1 - \sum_{i=1}^{NR} P_i^* = 1 - \sum_{j=0}^{(N-1)R} P_j(0)/\mu \quad (28)$$

(F) 到着客の損失確率 L

$$L = \sum_{i=(N-1)R+1}^{NR} P_i^0 = \sum_{i=(N-1)R+1}^{NR} P_i(0)/\lambda \quad (29)$$

(G) スループット T

$$T = \lambda(1-L) = \lambda - \sum_{i=(N-1)R+1}^{NR} P_i(0) \quad (30)$$

(H) 受理される客の到着直前での全残余フェーズ数分布 a_i^0

$$a_i^0 = P_i^0 / \sum_{j=0}^{(N-1)R} P_j^0 = P_i(0) / \sum_{j=0}^{(N-1)R} P_j(0) = P_i(0) / \lambda(1-L)$$

$$(0 \leq i \leq (N-1)R) \quad (31)$$

(I) 受理された客の待ち時間の P.D.F. $W(x)$

W : 受理された客の待ち時間を表す確率変数

$$W_0 \triangleq \Pr[W=0] = P_0(0) / \sum_{j=0}^{(N-1)R} P_j(0) = P_0(0) / \lambda(1-L) = a_0^0 \quad (32)$$

各々のフェーズ内ではパラメータ $R\mu$ の指数サービスを受けるから、実際の客の到着直前での全残余フェーズ数が i ($0 \leq i \leq (N-1)R$ であるとき受理される) であるときの到着客の待ち

時間、パラメータ $k\mu$ の i 次のア-ラン分布に従う。

$$\begin{aligned} W(x) &= \Pr[W \leq x] = W_0 + \sum_{i=1}^{(N-1)k} a_i \int_0^x \frac{k\mu (k\mu y)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-k\mu y} dy \\ &= 1 - \frac{e^{-k\mu x}}{\lambda(1-L)} \sum_{i=1}^{(N-1)k} P_i(0) \sum_{\ell=0}^{i-1} \frac{(k\mu x)^\ell}{\ell!} \end{aligned} \quad (33)$$

(J) 受理された客の平均待ち時間 \bar{W}

$$\bar{W} = \int_0^\infty (1-W(x)) dx = \sum_{i=1}^{(N-1)k} i \cdot P_i(0) / k\mu \lambda (1-L) \quad (34)$$

(K) 受理された客の到着直後での全残余フェーズ数分布 a_i^Δ

$$a_i^\Delta = \begin{cases} 0 & (0 \leq i \leq k-1) \\ a_{i-k}^\Delta = P_{i-k}(0) / \lambda(1-L) & (k \leq i \leq Nk) \end{cases} \quad (35)$$

(L) 受理された客の応答時間の P.D.F. $R(x)$

実際の客の到着直前での全残余フェーズ数が i ($0 \leq i \leq (N-1)k$) であるときの到着客の応答時間は、パラメータ $k\mu$ の $(i+k)$ 次のア-ラン分布に従う。

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{i=0}^{(N-1)k} a_i^\Delta \int_0^x \frac{k\mu (k\mu y)^{i+k-1}}{(i+k-1)!} e^{-k\mu y} dy \\ &= 1 - \frac{e^{-k\mu x}}{\lambda(1-L)} \sum_{i=0}^{(N-1)k} P_i(0) \sum_{\ell=0}^{i+k-1} \frac{(k\mu x)^\ell}{\ell!} \end{aligned} \quad (36)$$

(M) 受理された客の平均応答時間 \bar{R}

$$\bar{R} = \int_0^\infty (1-R(x)) dx = \sum_{i=0}^{(N-1)k} (i+k) P_i(0) / k\mu \lambda (1-L) \quad (37)$$

* (34)、(37)式より、当然ながら次式が成立している。

$$\bar{R} - \bar{W} = k(P_0(0) + P_1(0) + \cdots + P_{(N-1)k}(0)) / k\mu \lambda (1-L) = 1/\mu$$

(N) 退去直後での系内容数分布 α_n

系内の全残余フェーズ数 X が、 $1, k+1, \dots, (N-1)k+1$ という値をとるとき、退去はレート $k\mu$ でランダムに起こる。即ち、退去時点(直後)での系内容数の分布 α_n は、 $X = nk+1$ ($0 \leq n \leq N-1$) であるときの任意時点での全残余フェーズ数分布を用いて次式のように表わすことができる。

$$\alpha_n = \frac{k\mu P_{nk+1}^*}{k\mu \sum_{j=0}^{N-1} P_{jk+1}^*} = \begin{cases} P_0(0)/\lambda(1-L) & (n=0) \\ \sum_{j=(n-1)k+1}^{nk} P_j(0)/\lambda(1-L) & (1 \leq n \leq N-1) \end{cases} \quad (38)$$

(O) 遊休期間長の p.d.f. $i(x)$

遊休期間は、全残余フェーズ数 X が 1 であるときにレート $k\mu$ でランダムに始まり、その時の遊休期間長は、その時点での残余到着時間 x に等しい。よって遊休期間の始まりの時点で、その長さの p.d.f. は次式で与えられる。

$$i(x) = k\mu P_1(x) / k\mu \int_0^\infty P_1(y) dy = P_1(x) / P_1(0) = k\mu P_1(x) / P_0(0)$$

$$II(\theta) = \int_0^\infty i(x) e^{-\theta x} dx = k\mu P_1(\theta) / P_0(0)$$

$$= \frac{k\mu}{P_0(0)} \left\{ \sum_{j=(N-1)k+1}^{Nk} \frac{(-k\mu)^{j-1}}{(\theta - k\mu)^j} \left[(1-A(\theta)) P_j(0) - A(\theta) P_{j-k}(0) \right] \right. \\ \left. + \sum_{j=k}^{(N-1)k} \frac{(-k\mu)^{j-1}}{(\theta - k\mu)^j} \left[P_j(0) - A(\theta) P_{j-k}(0) \right] + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-k\mu)^{j-1}}{(\theta - k\mu)^j} P_j(0) \right\} \quad (39)$$

(P) 平均遊休期間長 \bar{I}

$$\bar{I} = -dII(\theta)/d\theta |_{\theta=0} = -k\mu P_1''(0) / P_0(0)$$

$$(こゝで \quad P_1''(0) = [\lambda - \mu - \sum_{j=(N-1)k+1}^{Nk} P_j(0)] / k\mu^2)$$

$$= [\mu - \lambda(1-L)] / \mu P_0(0) = P_0^* / P_0(0) \quad (40)$$

(Q) 平均稼働期間長 \bar{Y}

任意時点で系が idle である確率 g_0^* 、平均遊休期間長 \bar{I} 、平均稼働期間長 \bar{Y} の関係は次式のように表わすことができる⁽⁴⁾。

$$g_0^* = \bar{I} / (\bar{Y} + \bar{I})$$

ここで $g_0^* = P_0^*$ であるから次式を得る。

$$\bar{Y} = (1 - P_0^*) \bar{I} / P_0^* = \lambda(1 - L) / \mu P_0(0) = (1 - P_0^*) / P_0(0) \quad (41)$$

(R) 客の退去間隔の p.d.f. $d(x)$

$d(x|busy)$: 退去直後の系の状態が busy であるという条件の下での客の退去間隔の p.d.f.

$d(x|idle)$: 退去直後の系の状態が idle period の開始時点であるという条件の下での客の退去間隔の p.d.f.
($x \geq 0$)

客の退去時点で系の状態が busy であり続けるならば、退去間隔の p.d.f. はサービス時間の p.d.f. に等しい。

$$d(x|busy) = k_\mu (k_\mu x)^{k_\mu - 1} e^{-k_\mu x} / (k_\mu - 1)!$$

客の退去時点で必ず idle 状態にはいるものとすれば、その時の退去間隔の p.d.f. は、遊休期間長の p.d.f. とサービス時間の p.d.f. との convolution になる。

$$d(x|idle) = \int_0^x [i(x-y) \cdot k_\mu (k_\mu y)^{k_\mu - 1} e^{-k_\mu y} / (k_\mu - 1)!] dy$$

$$d(x) = d_0 \cdot d(x|idle) + (1 - d_0) \cdot d(x|busy)$$

$$D(\theta) = \int_0^\infty d(x) e^{-\theta x} dx$$

$$= \left(\frac{k\mu}{\theta + k\mu} \right)^k [1 - \alpha_0(1 - \Pi(\theta))] \quad (42)$$

(5) 平均退去間隔 \bar{D}

$$\bar{D} = -\alpha D(\theta)/d\theta|_{\theta=0} = 1/\mu + \alpha_0 \bar{I} = 1/\lambda(1-L) = 1/T \quad (43)$$

(6) 待合室の利用率 U

$$\bar{Q} \triangleq \sum_{n=1}^N (n-1) f_n^* : \text{任意時点での平均待ち行列長}$$

$$U \triangleq \bar{Q}/(N-1) = \sum_{n=1}^N (n-1) f_n^* / (N-1) \quad (44)$$

5. 数値結果

本節では、例として $GI/E_4/1/4$ をとりあげ、到着分布としては、 m 次のアーラン分布 E_m と、

$$A(\theta) = (3/4) \cdot 2\lambda / (\theta + 2\lambda) + (1/4) \cdot (2\lambda/5) / (\theta + 2\lambda/5)$$

で与えられる 2 次の超指数分布 H_2 ($C_{x_0}^2 = 2.5$) を選び、 μ を固定し、 λ と m の値を変化させたときの諸特性量の平均値の数値例を示す。

Fig. 3, 7, 9 では、到着分布の変動係数が小さいほど小さな値をとり、Fig. 4 のスループットではその逆になっている。

Fig. 5, 6, 8, 10 では、いずれもほぼ $\rho = 1$ 付近で交点（厳密には 1 点で交わらない）が存在する。文献[6]では、平均系内容数の特性について論じられているが、これらの特性量についても同様であり、 ρ の値が小さい範囲では到着分布の変動係数が小さいときほど小さな値をとり、 ρ の値が交点付近より大きい範囲ではこの逆になることがわかる。

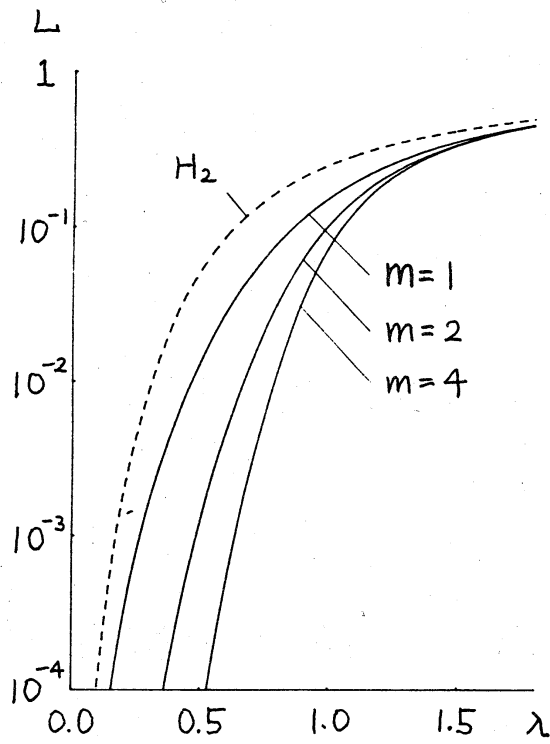


Fig. 3 損失確率
($E_m/E_4/1/4$) $\mu=1.0$

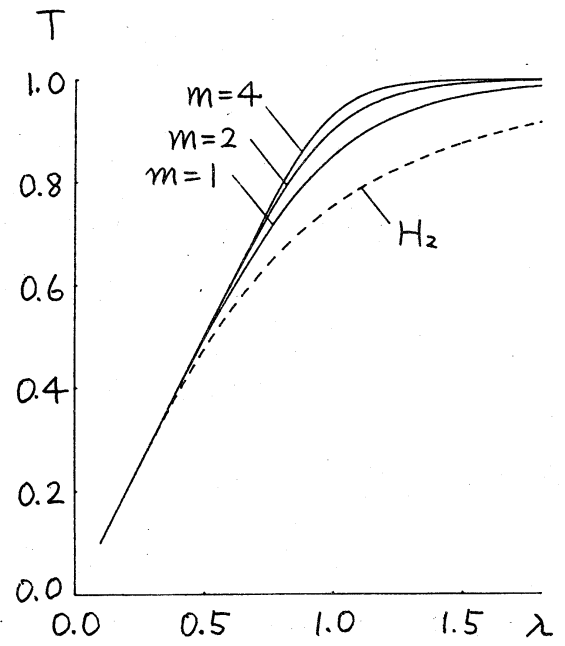


Fig. 4 スループット
($E_m/E_4/1/4$) $\mu=1.0$

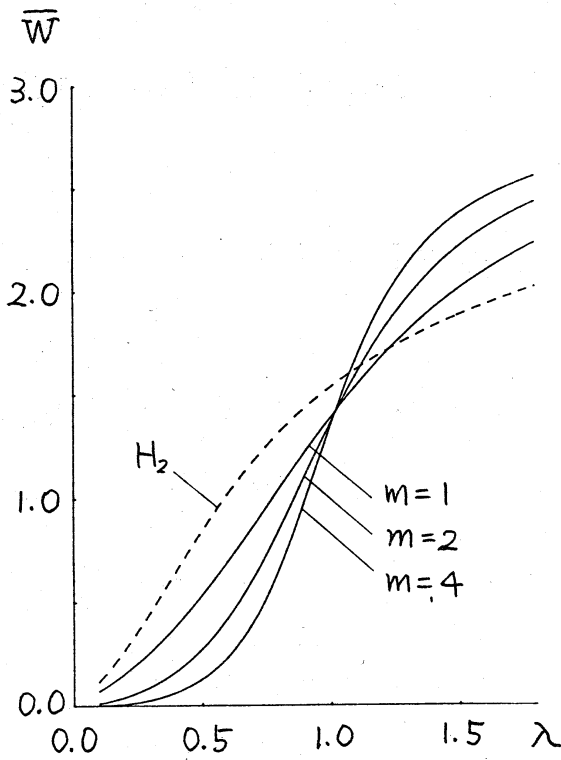


Fig. 5 平均待ち時間
($E_m/E_4/1/4$) $\mu=1.0$

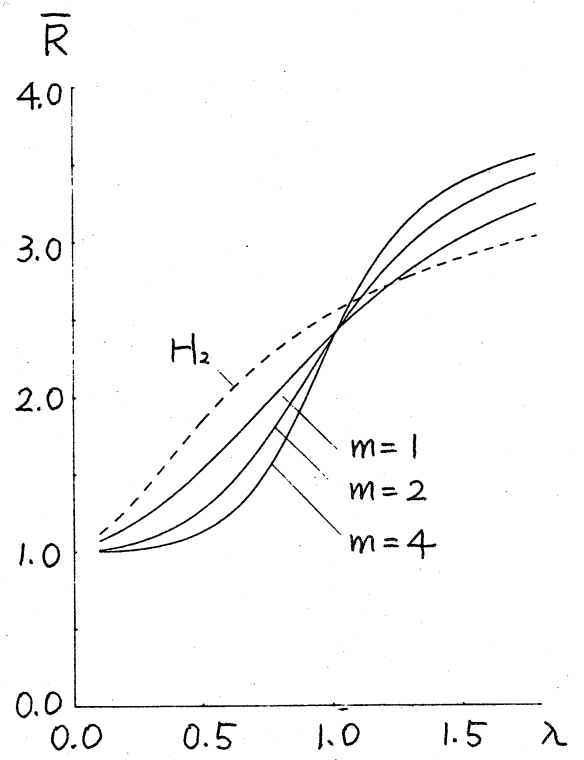


Fig. 6 平均応答時間
($E_m/E_4/1/4$) $\mu=1.0$

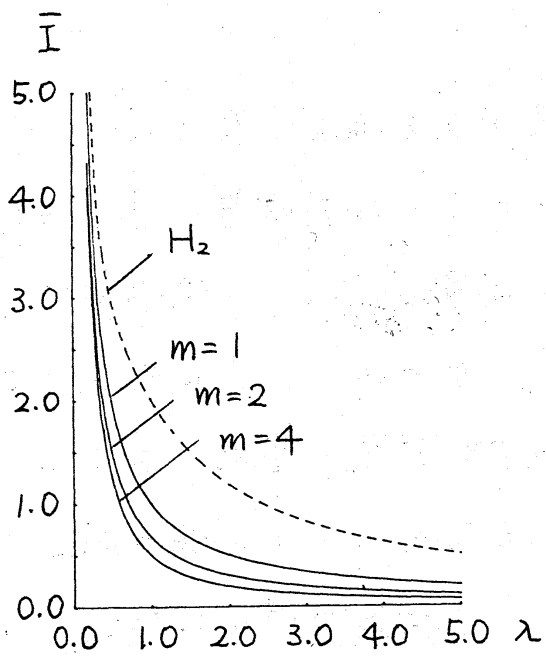


Fig. 7 平均遊休期間長
($E_m/E_4/1/4$) $\mu=1.0$

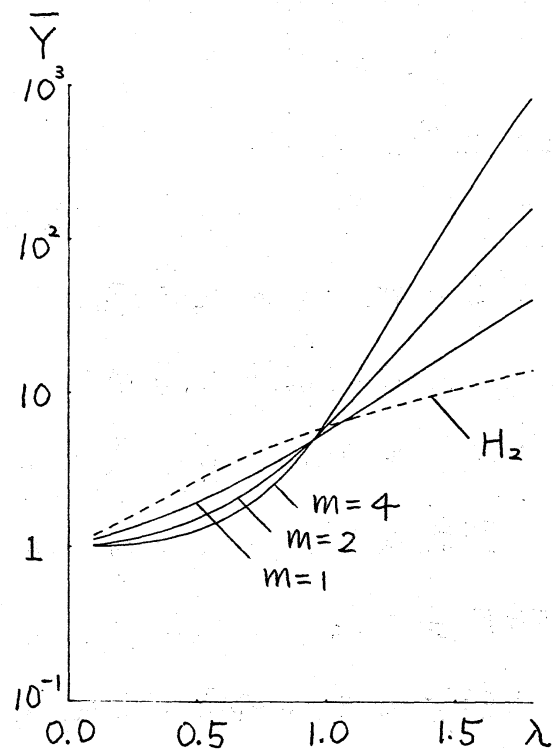


Fig. 8 平均稼働期間長
($E_m/E_4/1/4$) $\mu=1.0$

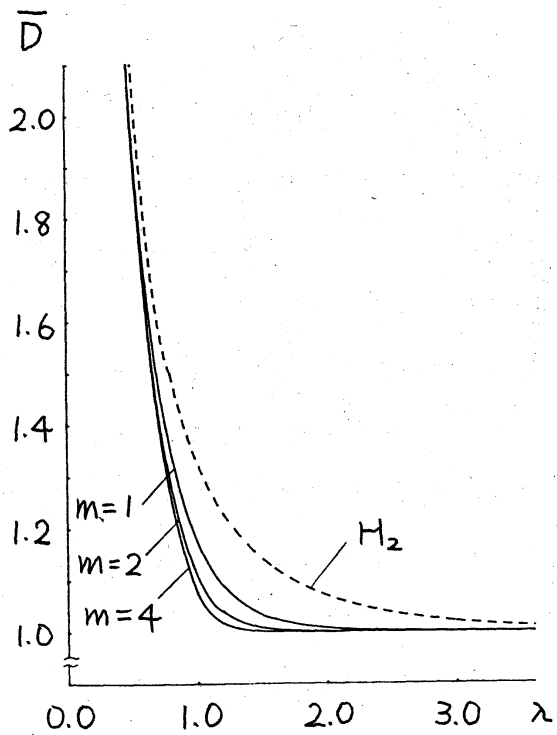


Fig. 9 平均退去間隔
($E_m/E_4/1/4$) $\mu=1.0$

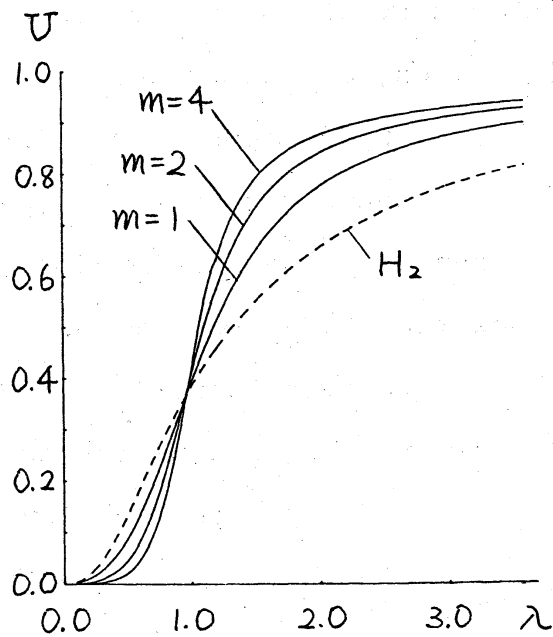


Fig. 10 待合室の利用率
($E_m/E_4/1/4$) $\mu=1.0$

6. おわりに

$GI/E_k/1/N$ において、残余到着時間を補助変数とし、フェーズ法と組み合わせて用いることにより諸特性量の導出を行ない、その数値例を求めた。その結果、これらの特性量はすべて $P_i(0)$ を用いて書き表わせることがわかる。また数値例より、到着及びサービス時間分布の変動係数を変化させると、諸特性量においてもグラフに交点が存在し、 ρ の値の範囲により相互の大小関係が反転するという結果が得られた。

今後の課題としては、有限待合室をもつ $PH/G/1$, $GI/PH/1$, $GI/E_k/m$ 待ち行列等の解析があげられる。

＜ 文 献 ＞

- [1] Kleinrock, L.: Queueing Systems, vol.1 theory, Wiley (1974).
- [2] Keilson, J.: "The Ergodic Queue Length Distribution for Queueing Systems with Finite Capacity," J. of Royal Statist., Soc. Series, B, vol.28, pp.190-201 (1966).
- [3] Cohen, J.W.: The Single Server Queue, North-Holland (1969).
- [4] Hokstad, P.: "Asymptotic Behaviour of the $E_k/G/1$ with Finite Waiting Room," J. Appl. Prob. 14, pp.358-366 (1977).
- [5] Truslove, A.L.: "Queue Length for the $E_k/G/1$ Queue with Finite Waiting Room," Adv. Appl. Prob. 7, pp.215-226 (1975).
- [6] Ohson, T.: "The $GI/E_k/1$ Queue with Finite Waiting Room," J. Operations Res. Soc. of Japan, vol.24, No.4 December, pp.375-391 (1981).